

2018~2019学年天津南开区南开大学附属中学高二下学期期中数学试卷

一、选择题

1. 若复数 z 满足 $z(1-i) = 1+i$, i 为虚数单位, 则 $z^{2019} = ()$.
A. $-2i$ B. i C. $-i$
2. $C_3^2 + C_4^2 + C_5^2 + C_6^2 = ()$.
A. 31 B. 32 C. 33 D. 34
3. 已知 $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{2x}}$, 则 $f'\left(\frac{1}{2}\right) = ()$.
A. $-2 - \ln 2$ B. $-2 + \ln 2$ C. $2 - \ln 2$ D. $2 + \ln 2$
4. 某班星期一上午安排5节课, 若数学2节, 语文、物理、化学各1节, 且物理、化学不相邻, 2节数学相邻, 则星期一上午不同课程安排种数为 () .
A. 6 B. 12 C. 24 D. 48
5. 设点 P 是曲线 $f(x) = x - 2\ln x$ 上的任意一点, 则 P 到直线 $x + y + 2 = 0$ 的距离的最小值为 () .
A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. $2\sqrt{2}$ D. $\sqrt{2} - \sqrt{2}\ln 2$
6. 袋中有5个红球, 3个白球, 不放回地抽取2次, 每次抽1个. 已知第一次抽出的是红球, 则第2次抽出的是白球的概率为 () .
A. $\frac{3}{7}$ B. $\frac{3}{8}$ C. $\frac{4}{7}$ D. $\frac{15}{56}$
7. 已知函数 $f(x)$ 的导数为 $f'(x)$, 且 $(x+1)f(x) + xf'(x) \geq 0$ 对 $x \in [0, +\infty)$ 恒成立, 则下列不等式一定成立的是 () .
A. $f(1) < 2ef(2)$ B. $ef(1) < f(2)$ C. $f(1) < 0$ D. $ef(e) < 2f(2)$
8. 中国南北朝时期的著作《孙子算经》中, 对同余除法有较深的研究. 设 $a, b, m(m > 0)$ 为整数, 若 a 和 b 被 m 除得的余数相同, 则称 a 和 b 对模 m 同余, 记为 $a \equiv b(\text{mod } m)$. 若 $a = C_{20}^0 + C_{20}^1 \cdot 2 + C_{20}^2 \cdot 2^2 + \cdots + C_{20}^{20} \cdot 2^{20}$, $a \equiv b(\text{mod } 8)$, 则 b 的值可以是 () .
A. 2015 B. 2016 C. 2017 D. 2018

二、填空题

9. 复数 z 满足 $(1+i)z = 1+2i$ (i 是虚数单位), 则复数 z 对应的点位于复平面的第 _____ 象限.

10. 设随机变量 X 的概率分布列如下图, 则 $P(|X-2|=1) = \underline{\hspace{2cm}}$.

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	m	$\frac{1}{3}$

11. 已知某曲线的方程为 $y = x^2 + 2$, 则过点 $B(2, -3)$ 且与该曲线相切的直线的一般式方程为 _____ .

12. 已知 $(x+2)^6 = a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)^2 + \cdots + a_6(x+1)^6$, 则 $a_3 = \underline{\hspace{2cm}}$ (用数字作答) .

13. 已知函数 $f(x) = m\left(x - \frac{1}{x}\right) - 2\ln x (m \in \mathbf{R})$, $g(x) = -\frac{m}{x}$, 若至少存在一个 $x_0 \in [1, e]$, 使得 $f(x_0) < g(x_0)$ 成立, 则实数 m 的取值范围是 _____.

14. 由 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4 可组成不同的四位数的个数为 _____ (用数字作答).

三、解答题

15. 按要求答题:

(1) 计算: $\frac{4A_8^4 + 2A_8^5}{A_8^8 - A_9^5}$.

(2) 解不等式: $\frac{1}{C_x^3} - \frac{1}{C_x^4} < \frac{2}{C_x^5}$. (结果用集合表示)

16. 已知复数 $z = 1 + mi$ (i 是虚数单位, $m \in \mathbf{R}$), 且 $\bar{z} \cdot (3 + i)$ 为纯虚数 ($\bar{z}$ 是 z 的共轭复数).

(1) 设复数 $z_1 = \frac{m + 2i}{1 - i}$, 求 $|z_1|$.

(2) 设复数 $z_2 = \frac{a - i^{2017}}{z}$, 且复数 z_2 所对应的点在第一象限, 求实数 a 的取值范围.

17. 某电子公司开发一种智能手机的配件, 每个配件的成本是 15 元, 销售价是 20 元, 月平均销售 a 件, 通过改进工艺, 每个配件的成本不变, 质量和技术含金量提高, 市场分析的结果表明, 如果每个配件的销售价提高的百分率为 x ($0 < x < 1$), 那么月平均销售量减少的百分率为 x^2 , 记改进工艺后电子公司销售该配件的月平均利润是 y (元).

(1) 写出 y 与 x 的函数关系式.

(2) 改进工艺后, 试确定该智能手机配件的售价, 使电子公司销售该配件的月平均利润最大.

18. 已知甲盒内有大小相同的 1 个红球和 3 个黑球, 乙盒内有大小相同的 3 个红球和 3 个黑球, 现从甲、乙两个盒内各任取 2 个球.

(1) 求取出的 4 个球中没有红球的概率.

(2) 求取出的 4 个球中恰有 1 个红球的概率.

(3) 若规定: 取到一个红球得 2 分, 取到一个黑球得 -1 分, 求得分 ξ 的分布列.

19. 在 $\left(x^2 + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^n$ 的展开式中, 第 5 项的系数与第 3 项的系数之比为 20 : 3.

(1) 求 n 的值.

(2) 求展开式中所有的有理项.

(3) 求展开式中系数最大的项.